第一部分：選擇題（1～26題）

1. 已知 $a=(-12)\times(-23)\times(-34)\times(-45)$，$b=(-123)\times(-234)\times(-345)$，判斷下列敘述何者正確？

(A) a、b 皆為正數 (B) a、b 皆為負數

(C) a 為正數，b 為負數 (D) a 為負數，b 為正數

【答案】C

【詳解】

$a=(-12)\times(-23)\times(-34)\times(-45)$，有 4 個負數相乘，

因為偶數個負數的乘積是正數，所以 a 為正數。

$b=(-123)\times(-234)\times(-345)$，有 3 個負數相乘，

因為奇數個負數的乘積是負數，所以 b 為負數。

故選(C)

2. 算式 $2^3\times5^3$ 之值為何？

(A) 30 (B) 90 (C) 1000 (D) 1000000

【答案】C

【詳解】

$2^3\times5^3$

$=(2\times2\times2)\times(5\times5\times5)$ $a^b=\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{b\text{個}}$

$=8\times125$

$=1000$

故選(C)

3. 小真煮好了 25 顆湯圓，其中 15 顆為芝麻湯圓，10 顆為花生湯圓。已知小真想從煮好的湯圓中撈一顆，若每顆湯圓被小真撈到的機會相等，則他撈到花生湯圓的機率為何？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{10}$

【答案】C

【詳解】

題目要求小真撈到花生湯圓的機率，

小真一共煮了 25 顆湯圓，其中 10 顆為花生湯圓，

➔撈到花生湯圓的機率＝$\dfrac{\text{花生湯圓個數}}{\text{全部湯圓個數}}=\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$。

故選(C)

4. 算式 $\sqrt{2}\times(\sqrt{48}-\sqrt{12})$ 之值為何？

(A) $6\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{6}$　(C) $2\sqrt{21}$　(D) $4\sqrt{6}-2\sqrt{3}$

【答案】B

【詳解】

$\sqrt{2}\times(\sqrt{48}-\sqrt{12})$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{48}-\sqrt{2}\times\sqrt{12}$　分配律：$a\times(b-c)=a\times b-a\times c$

$=\sqrt{2\times 48}-\sqrt{2\times 12}$　a、b 大於等於 0 時，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

$=\sqrt{96}-\sqrt{24}$

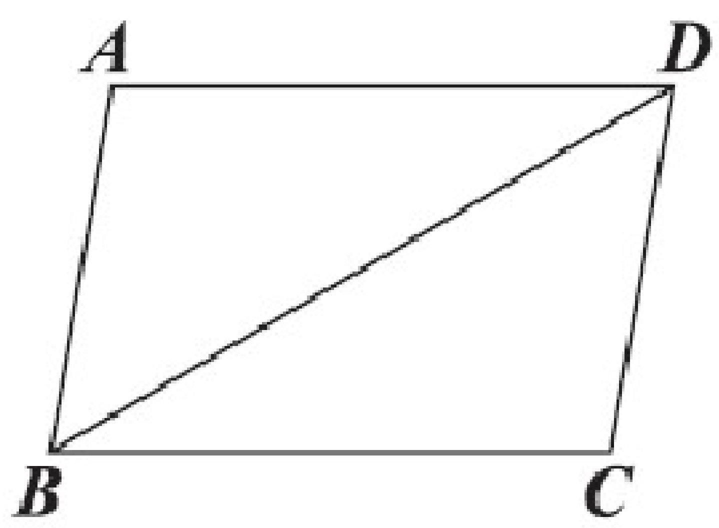
$=\sqrt{2^5\times 3}-\sqrt{2^3\times 3}$

$=4\sqrt{6}-2\sqrt{6}$　化成最簡根式

$=2\sqrt{6}$

故選(B)

5. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=100°$。若 $\angle ABD$：$\angle DBC=3$：2，則 $\angle DBC$ 的度數為何？



(A) 32　(B) 40

(C) 48　(D) 60

【答案】A

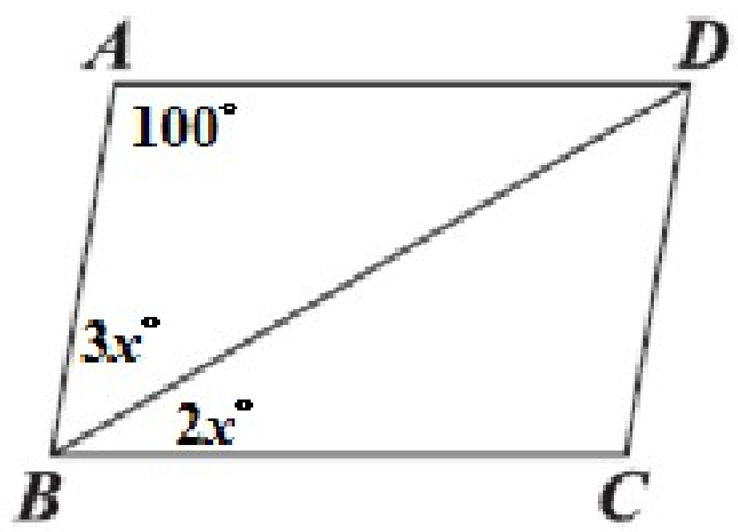
【詳解】

題目已知 $\angle ABD$：$\angle DBC=3$：2，

可設 $\angle ABD=3x°$，$\angle DBC=2x°$，x 不等於 0，

因為平行四邊形鄰角互補(同側內角互補)，

所以 $\angle A+\angle ABC=180°$



➔ $100°+(3x°+2x°)=180°$

➔ $100°+5x°=180°$

➔ $5x°=80°$

➔ $x=16$，

因此 $\angle DBC=(2\times 16)°=32°$。

故選(A)

6. 附圖數線上的 A、B、C 三點所表示的數分別為 a、b、c，且原點為 O。根據圖中各點位置，判斷下列四個式子的值何者最大？

(A) $|a|+|b|$　(B) $|a|+|c|$

(C) $|a-c|$　(D) $|b-c|$

【答案】A

【詳解】

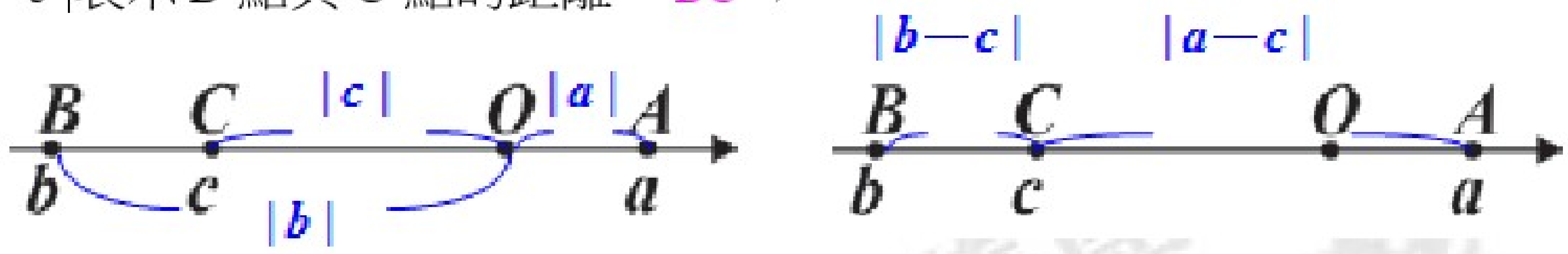
$|a|$表示 A 點與原點的距離，$|b|$表示 B 點與原點的距離，$|c|$表示 C 點與原點的距離，

$|a|+|b|=A$ 點與原點的距離 $+B$ 點與原點的距離 $=\overline{AB}$ ；

$|a|+|c|=A$ 點與原點的距離 $+C$ 點與原點的距離 $=\overline{AC}$ ；

$|a-c|$表示 A 點與 C 點的距離 $=\overline{AC}$ ；

$|b-c|$表示 B 點與 C 點的距離 $=\overline{BC}$ ；



由圖可知 $\overline{AB}>\overline{AC}>\overline{BC}$ ，所以$|a|+|b|$最大。

故選(A)

7. 計算 $2x^2-3$ 除以 $x+1$ 後，得商式和餘式分別為何？

(A) 商式為 2，餘式為 -5

(B) 商式為 $2x-5$，餘式為 5

(C) 商式為 $2x+2$，餘式為 -1

(D) 商式為 $2x-2$，餘式為 -1

【答案】D

【詳解】

被除式 $2x^2-3$ 缺項，要記得補 0，

利用長除法計算，得商式為 $2x-2$，餘式為 -1。

$$\begin{array}{r|l} & 2x\ -2 \\ \hline x+1 & 2x^2+0x-3 \\ & 2x^2+2x \\ \hline & \quad -2x-3 \\ & \quad -2x-2 \\ \hline & \qquad\ \ -1 \end{array}$$

故選(D)

8. 下列何者可表示成兩個質數的乘積？

(A) 81　(B) 82　(C) 83　(D) 84

【答案】B

【詳解】

(A)$81=3\times3\times3\times3=3^4$ ，無法表示成兩個質數的乘積

(B)$82=2\times41$ ，可表示成兩個質數的乘積

(C)83 是質數，無法表示成兩個質數的乘積

(D)$84=2^2\times3\times7$ ，無法表示成兩個質數的乘積

故選(B)

9. 已知小薇住家的西方 100 公尺處為車站，住家的北方 200 公尺處為學校，且從學校往東方走 100 公尺，再往南方走 400 公尺可到達公園。若小薇將住家、車站、學校分別標示在坐標平面上的 $(2,0)$、$(0,0)$、$(2,4)$三點，則公園應標示在此坐標平面上的哪一點？

(A) $(4,-4)$　(B) $(4,12)$　(C) $(0,-4)$　(D) $(0,12)$

【答案】A

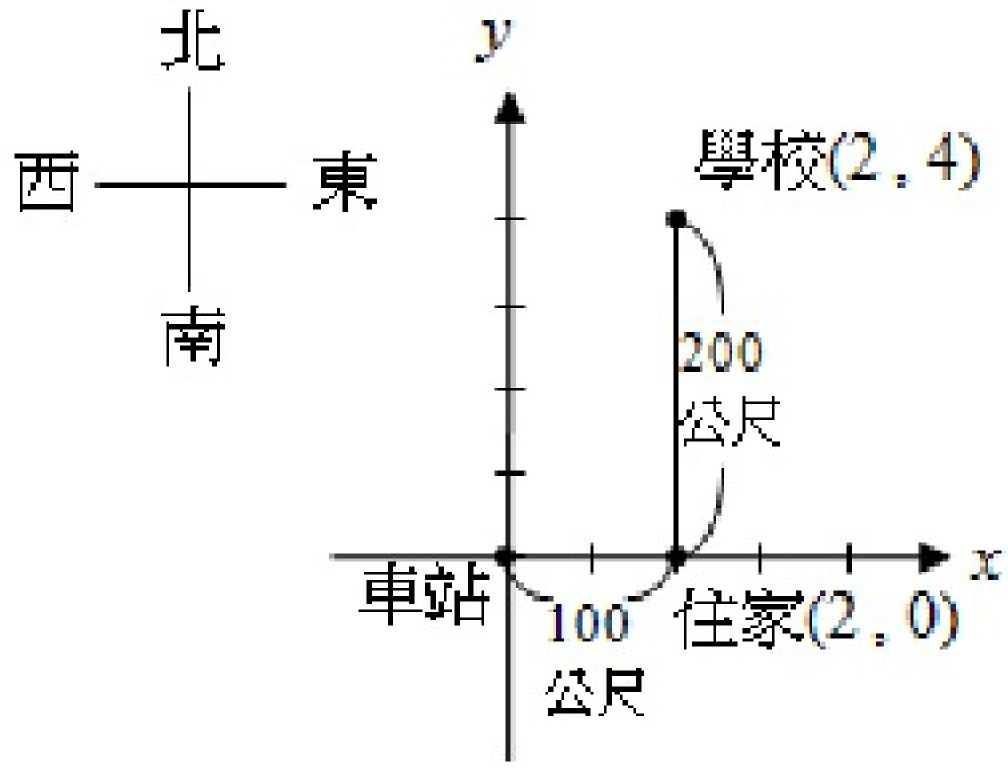
【詳解】

❶在坐標平面上標示出住家$(2,0)$、車站$(0,0)$、學校$(2,4)$三點，如附圖，

由圖可知住家與車站距離 2 個單位長，

且由題目知住家與車站距離 100 公尺，

所以每 1 單位長是 $100\div2=50$ 公尺。



❷題目要求公園的坐標，

因為從學校往東方走 100 公尺，

再往南方走 400 公尺可到達公園，

所以在坐標平面上要從學校$(2,4)$

往東 $100\div50=2$ 單位長，再往南 $400\div50=8$ 單位長

➔公園$(2+2,4-8)=(4,-4)$。故選(A)

10. 若一元二次方程式 $5(x-4)^2=125$ 的解為 a、b，且 $a>b$，則 $2a+b$ 之值為何？

(A) -7　(B) -1　(C) 11　(D) 17

【答案】D

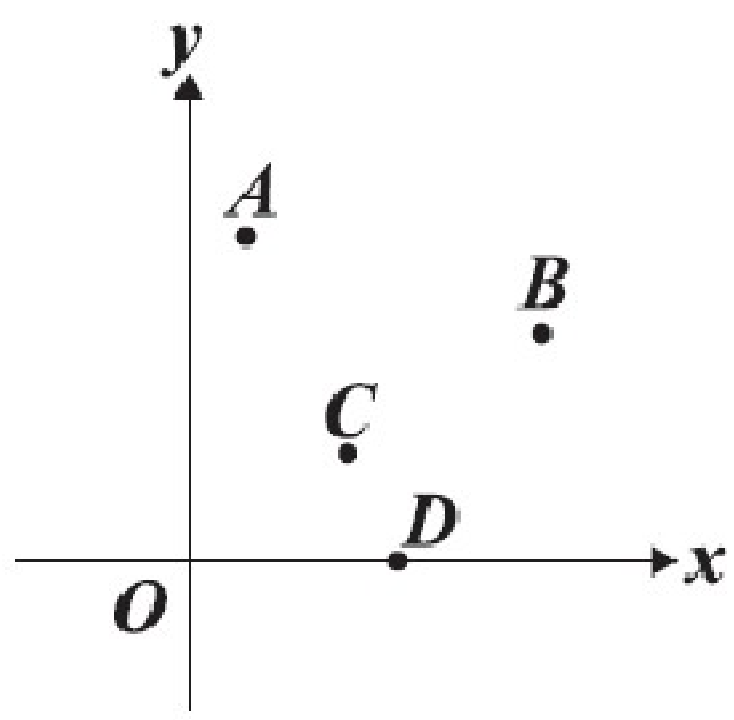
【詳解】

$5(x-4)^2=125$，左右同除以 5 得$(x-4)^2=25$ ➔ $x-4=\pm5$ ➔ $x=4+5=9$ 或 $x=4-5=-1$，

因為 $a>b$，所以 $a=9$，$b=-1$，

因此 $2a+b=2\times9+(-1)=18-1=17$。故選(D)

11. 附圖的坐標平面上有 A、B、C、D 四點，其中恰有三點在函數 $y=px+q$ 的圖形上，且 p、q 為兩數。根據圖中四點的位置，判斷下列哪一點不在函數 $y=px+q$ 的圖形上？



(A) A　(B) B

(C) C　(D) D

【答案】B

【詳解】

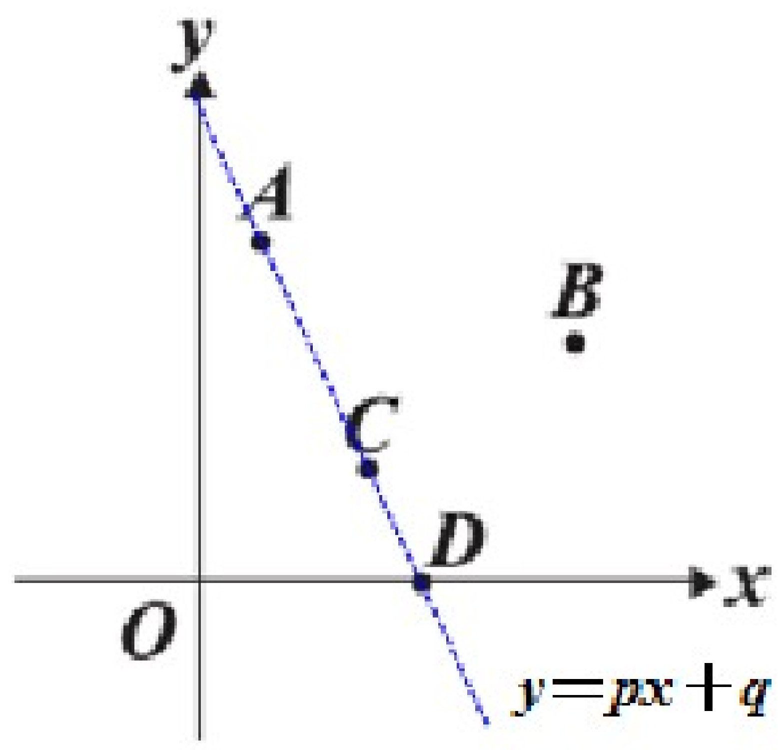
函數 $y=px+q$ 為線型函數，圖形是一直線，

題目已知 A、B、C、D 四點中，

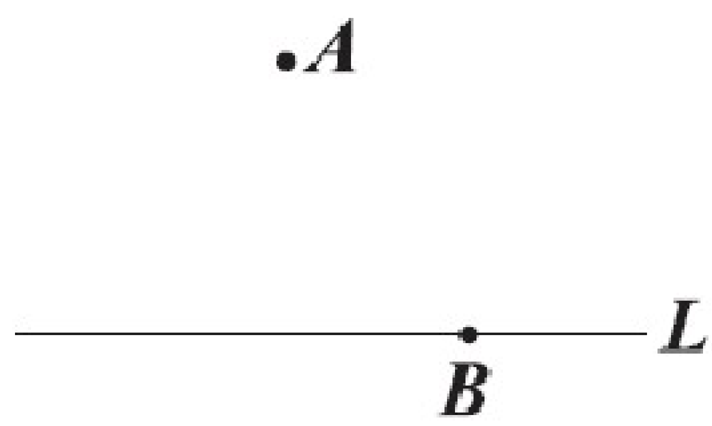
其中恰有三點在圖形上，

由圖可知 A、C、D 三點在一直線上，

即 B 點不在函數 $y=px+q$ 的圖形上。故選(B)



12. 附圖表示平面上 A、B 兩點與直線 L 的位置關係，其中 B 點在 L 上。若有一動點 P 從 A 點開始移動，移動過程中與 B 點的距離保持不變，則下列關於 P 點移動路徑的敘述，何者正確？



(A) 在與直線 L 平行且通過 A 點的直線上

(B) 在與直線 L 垂直且通過 A 點的直線上

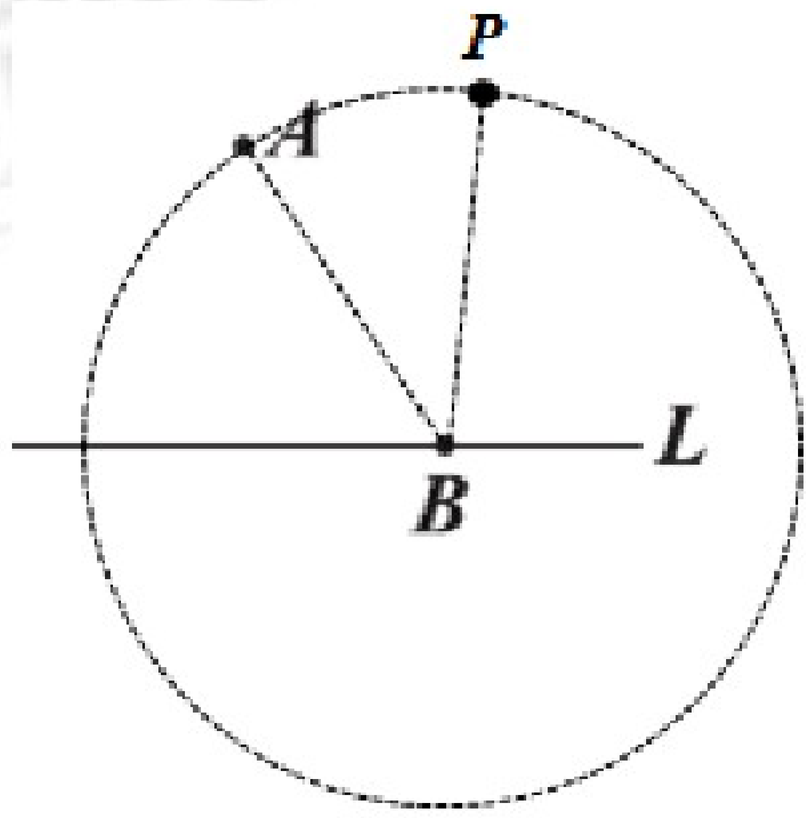
(C) 在以 B 點為圓心且通過 A 點的圓上

(D) 在以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上

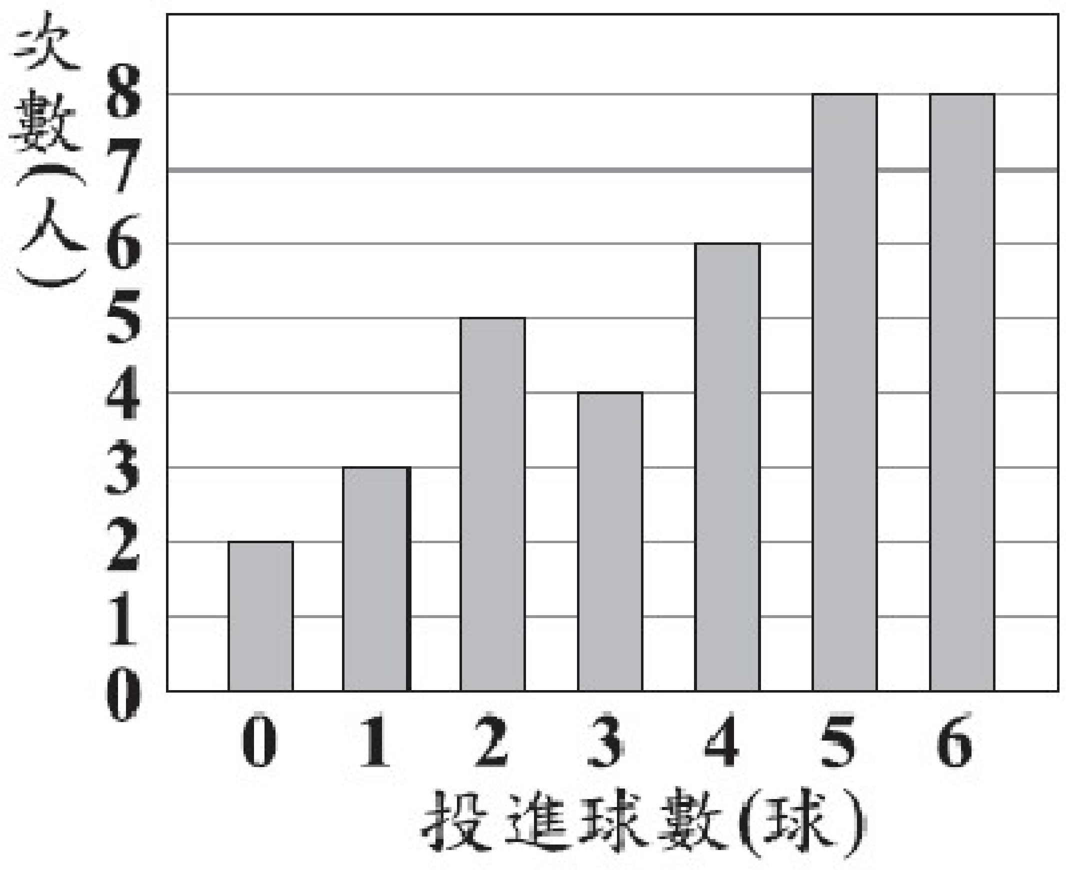
【答案】C

【詳解】

動點 P 從 A 點開始移動，
移動過程中與 B 點的距離保持不變，
表示動點 P 在以 B 點為圓心且通過 A 點的圓上
(圓的半徑為動點 P 與 B 點的距離)。
故選(C)



13. 附圖為甲班 36 名學生參加投籃測驗的投進球數長條圖。判斷甲班學生中，有多少人的投進球數小於該班學生投進球數的中位數？



(A) 10

(B) 14

(C) 17

(D) 18

【答案】B

【詳解】

甲班有 36 名學生，$36\div2=18$，
則甲班的中位數是由小到大第 18、19 筆資料的平均數，
由長條圖知投進 0、1、2、3 球的人數總和 $=2+3+5+4=14$(人)，
投進 0、1、2、3、4 球的人數總和 $=2+3+5+4+6=20$(人)，
可知第 18、19 筆資料都是投進 4 球
➔中位數 $=(4+4)\div2=4$(球)，
投進球數小於 4 球的人，即投進 0、1、2、3 球的人數總和有 14 人。
故選(B)

14. 附圖為朵朵披薩屋的公告。若一個夏威夷披薩調漲前的售價為 x 元，則會員購買一個夏威夷披薩的花費，公告前後相差多少元？

(A) $0.05x$

(B) $0.09x$

(C) $0.14x$

(D) $0.15x$

【答案】C

【詳解】

一個夏威夷披薩調漲前為 x 元，會員結帳打八五折

➔會員購買一個夏威夷披薩要花 $x \times 0.85 = 0.85x$ (元)；

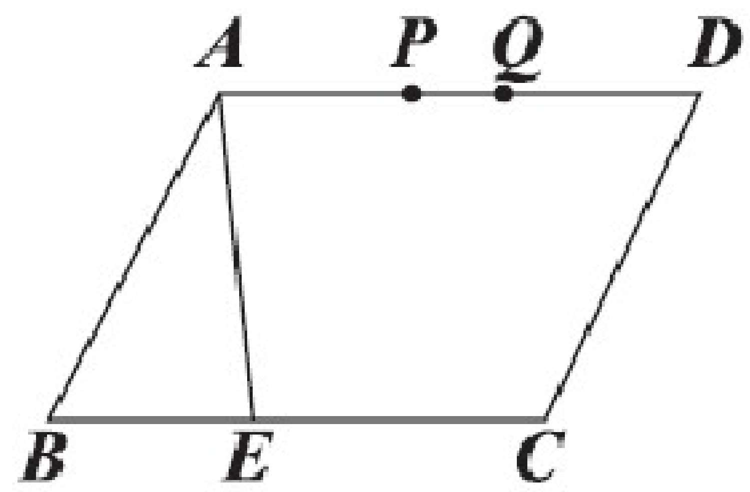
調漲後，夏威夷披薩調漲 10%，會員結帳打九折，

➔調漲後會員購買一個夏威夷披薩要花 $x \times (1+10\%) \times 0.9 = x \times 1.1 \times 0.9 = 0.99x$ (元)，

因此公告前後相差 $0.99x - 0.85x = 0.14x$ (元)。

故選(C)

15. 平行四邊形 $ABCD$ 中，E 點在 $\overline{BC}$ 上，P、Q 兩點在 $\overline{AD}$ 上，其位置如圖所示。若 $\overline{PB}$ 與 $\overline{AE}$ 相交於 R 點，$\overline{QB}$ 與 $\overline{AE}$ 相交於 S 點，則下列三角形面積的大小關係，何者正確？



(A) $\triangle PBE > \triangle QBE$，$\triangle PRE > \triangle QSE$

(B) $\triangle PBE < \triangle QBE$，$\triangle PRE < \triangle QSE$

(C) $\triangle PBE = \triangle QBE$，$\triangle PRE > \triangle QSE$

(D) $\triangle PBE = \triangle QBE$，$\triangle PRE < \triangle QSE$

【答案】D

【詳解】

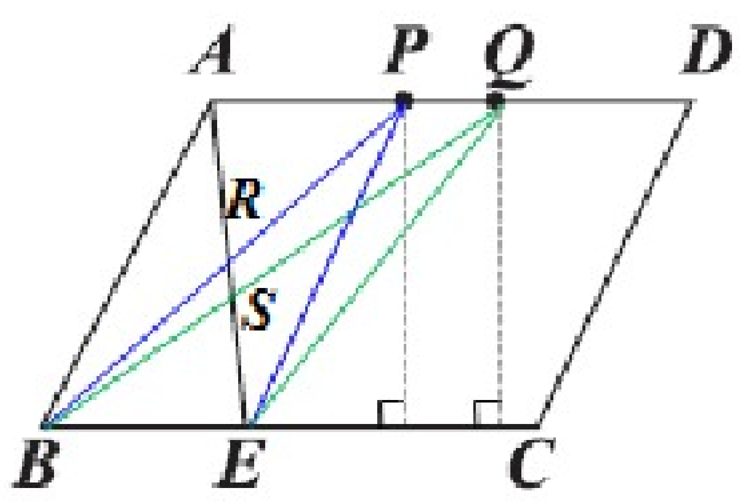
❶$\triangle PBE$、$\triangle QBE$ 如附圖所示，兩個三角形有相同的底 $\overline{BE}$，

因為四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，所以 $\overline{AD} // \overline{BC}$，

根據平行線之間距離處處相等，

可知$\triangle PBE$、$\triangle QBE$ 有相等的高($\overline{BE}$ 為底邊)

➔$\triangle PBE$ 面積＝$\triangle QBE$ 面積



❷由$\triangle PBE$ 面積＝$\triangle QBE$ 面積，

可得$\triangle PRE$ 面積＋$\triangle BRE$ 面積＝$\triangle QSE$ 面積＋$\triangle BSE$ 面積，

由圖可知$\triangle BSE$ 在$\triangle BRE$ 中，所以$\triangle BRE$ 面積＞$\triangle BSE$ 面積，

因此$\triangle PRE$ 面積＜$\triangle QSE$ 面積(小＋大＝大＋小)。

故選(D)

16. 中秋節時阿柚製作的廣式月餅、蛋黃酥、鳳梨酥的數量比為 2：1：3，其中只有製作廣式月餅和蛋黃酥時使用鹹蛋黃。若阿柚製作每個廣式月餅時使用 2 顆鹹蛋黃，製作每個蛋黃酥時使用 1 顆鹹蛋黃，且總共使用 120 顆鹹蛋黃，則他製作了幾個鳳梨酥？

(A) 45 (B) 60 (C) 72 (D) 120

【答案】C

【詳解】

已知廣式月餅、蛋黃酥、鳳梨酥的數量比為 2：1：3，

可設廣式月餅、蛋黃酥、鳳梨酥的數量分別為 $2r$、r、$3r$，r 不等於 0，

因為每個廣式月餅使用 2 顆鹹蛋黃，每個蛋黃酥使用 1 顆鹹蛋黃，

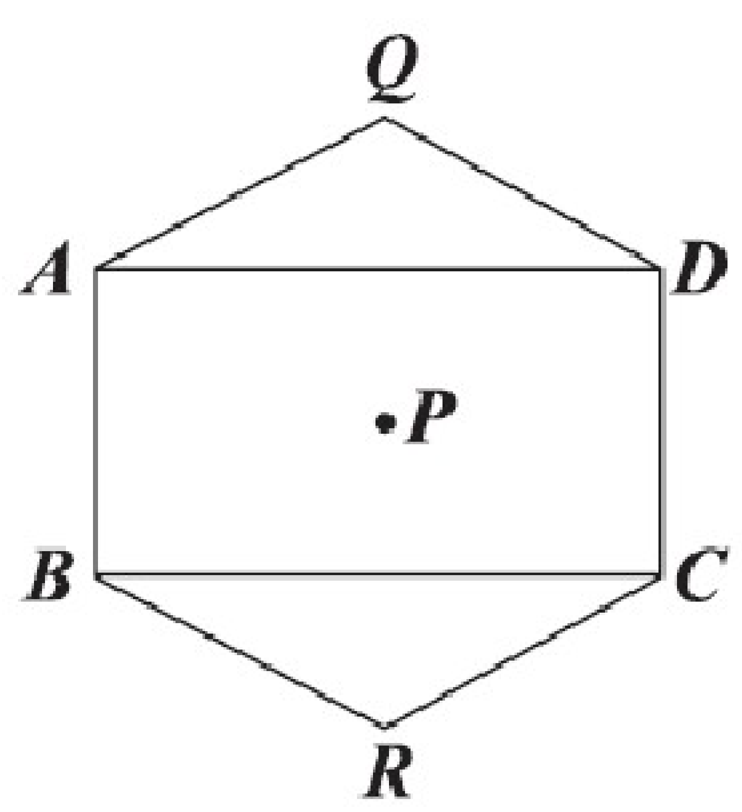
所以共用了 $2\times 2r+1\times r=4r+r=5r$ 顆鹹蛋黃，

已知總共使用 120 顆鹹蛋黃，可列出 $5r=120 \rightarrow r=24$，

因此鳳梨酥一共製作了 $3\times 24=72$ 個。

故選(C)

17. 如圖，P 點為矩形 $ABCD$ 兩對角線的交點，將 P 點分別以 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 為對稱軸畫出對稱點 Q、R，形成六邊形 $QABRCD$。若 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=4$，則六邊形 $QABRCD$ 的周長為何？



(A) 12

(B) $4+2\sqrt{6}$

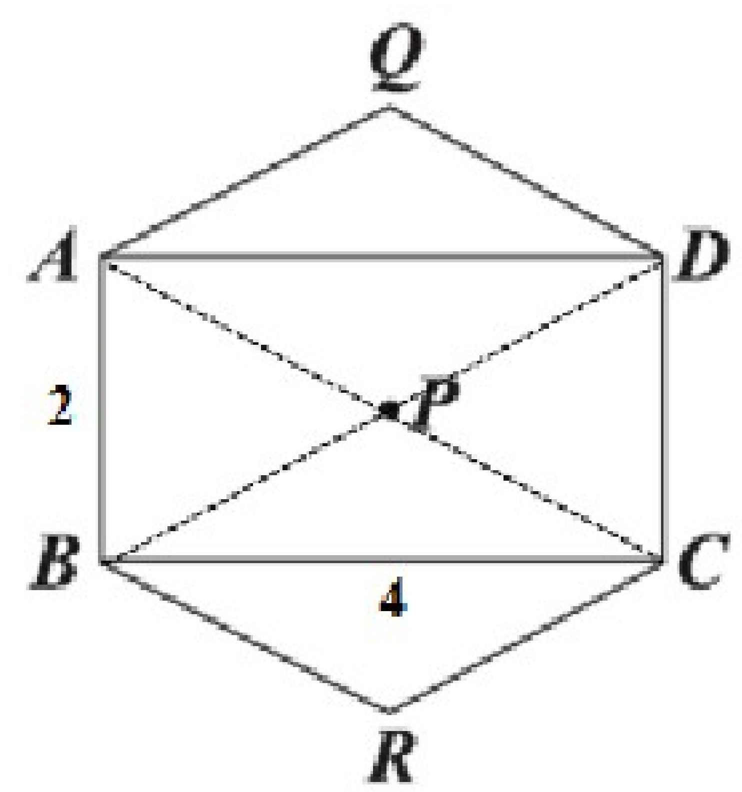
(C) $4+4\sqrt{3}$

(D) $4+4\sqrt{5}$

【答案】D

【詳解】

- 連接 $\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$，
  因為將 P 點分別以 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 為對稱軸畫出對稱點 Q、R，
  所以 $\overline{AQ}=\overline{AP}$ 、$\overline{DQ}=\overline{DP}$ 、$\overline{BR}=\overline{BP}$ 、$\overline{CR}=\overline{CP}$(對稱邊相等)，
  求出矩形對角線上各線段的長度，
  即可求出六邊形 $QABRCD$ 的周長。

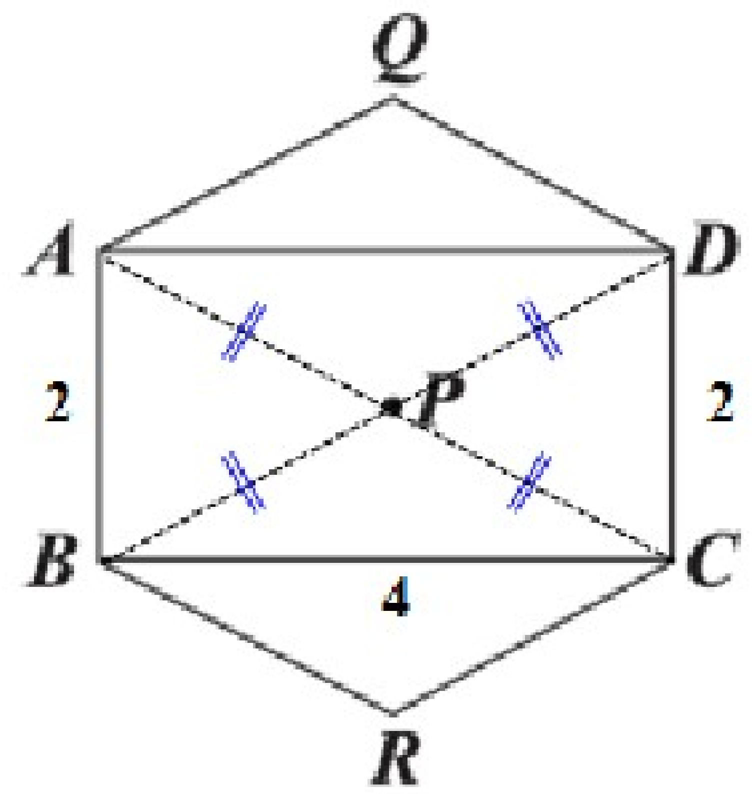


❶因為四邊形 $ABCD$ 為矩形，所以 $\angle ABC=90°$，
在直角三角形 ABC 中，
由畢氏(勾股)定理可得

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times 5}=2\sqrt{5}$，

因為矩形對角線互相平分且等長，

所以 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{DP}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$ 。



❷由分析知$\overline{AQ}=\overline{AP}$、$\overline{DQ}=\overline{DP}$、$\overline{BR}=\overline{BP}$、$\overline{CR}=\overline{CP}$，

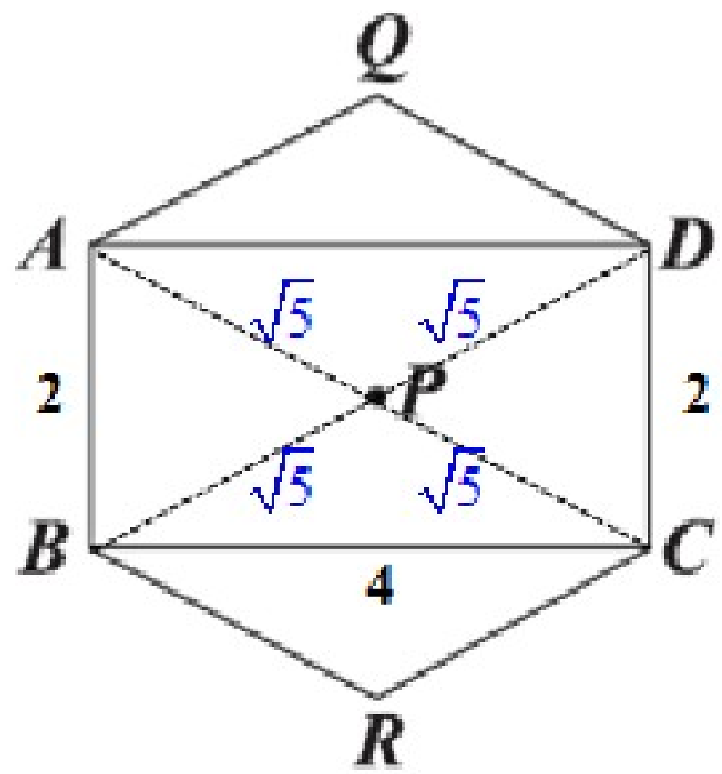
則$\overline{AQ}=\overline{DQ}=\overline{BR}=\overline{CR}=\sqrt{5}$，

又$\overline{CD}=\overline{AB}=2$(矩形對邊等長)，

則六邊形 $QABRCD$ 的周長$=\overline{AQ}+\overline{AB}+\overline{BR}+\overline{CR}+\overline{CD}+\overline{DQ}$

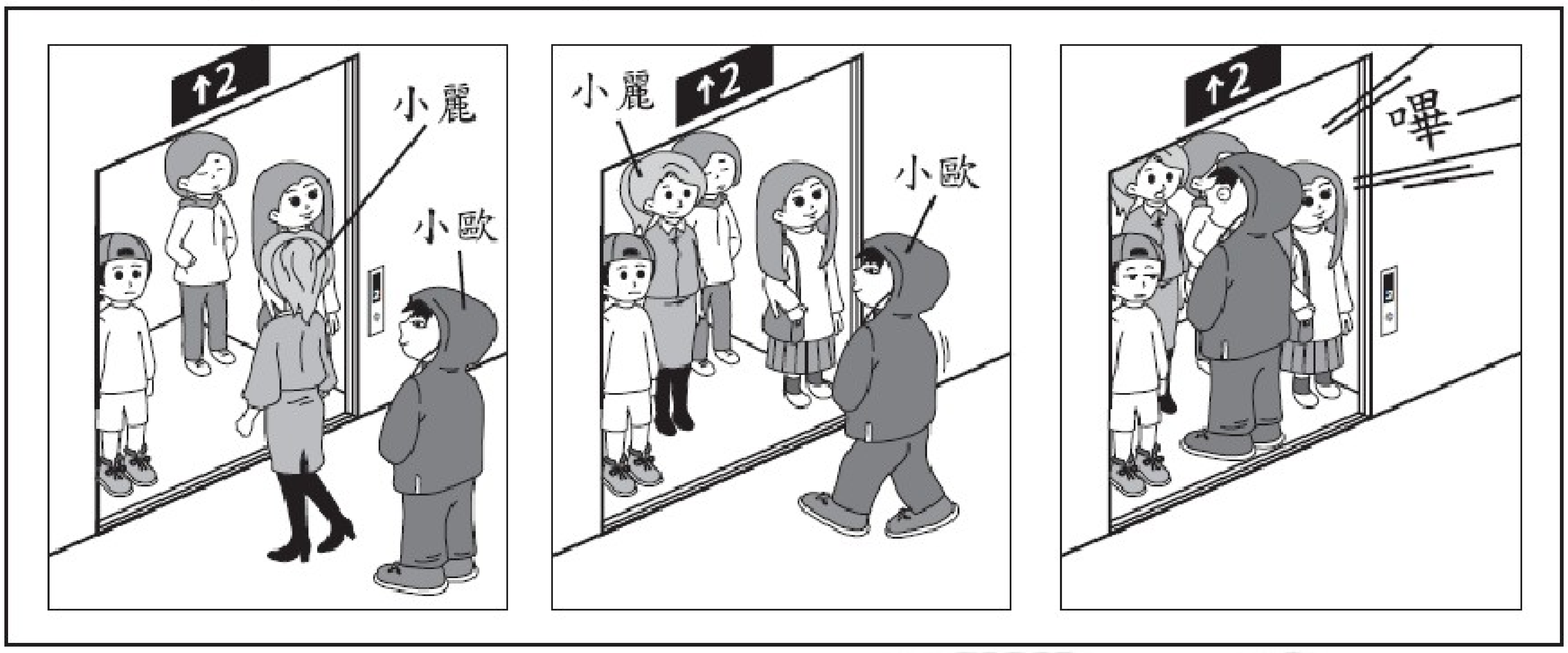
$=\sqrt{5}+2+\sqrt{5}+\sqrt{5}+2+\sqrt{5}$

$=4+4\sqrt{5}$。



故選(D)

18. 附圖為小麗和小歐依序進入電梯時，電梯因超重而警示音響起的過程，且過程中沒有其他人進出。



已知當電梯乘載的重量超過 300 公斤時警示音會響起，且小麗、小歐的重量分別為 50 公斤、70 公斤。若小麗進入電梯前，電梯內已乘載的重量為 x 公斤，則所有滿足題意的 x 可用下列哪一個不等式表示？

(A) $180<x\leq 250$　(B) $180<x\leq 300$　(C) $230<x\leq 250$　(D) $230<x\leq 300$

【答案】A

【詳解】

題目已知電梯乘載的重量超過 300 公斤時警示音會響起，小麗進入電梯前，電梯內已乘載的重量為 x 公斤，

因為小麗的重量為 50 公斤，且進入電梯後，警示音沒有響起，

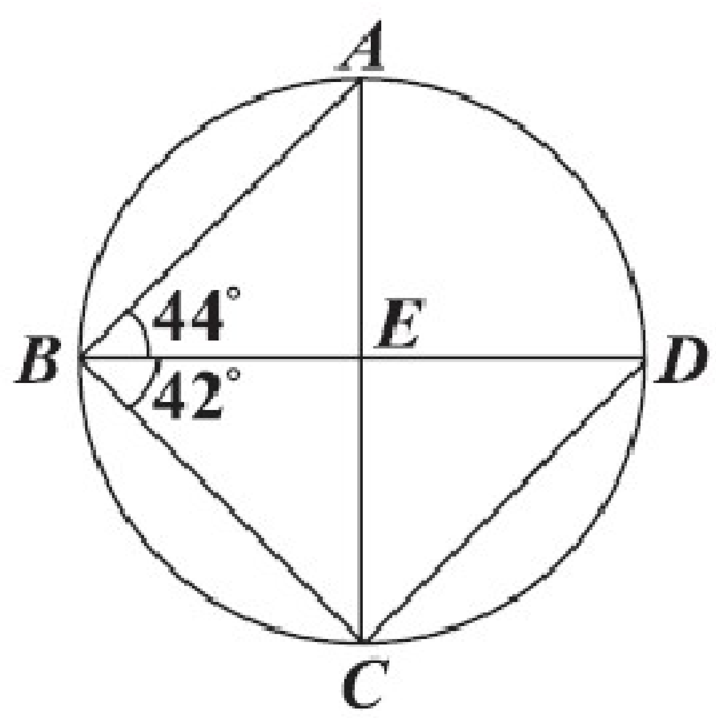
所以此時電梯乘載的重量 $x+50\leq 300$ ➔ $x\leq 250$，

因為小歐的重量為 70 公斤，且進入電梯後，警示音響起，

所以此時電梯乘載的重量 $x+50+70>300$ ➔ $x>180$，因此$180<x\leq 250$。

故選(A)

19. 圓上有 A、B、C、D 四點，其位置如圖所示，其中$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於 E 點，且$\overline{AB}=\overline{BC}$。根據圖中標示的角度，判斷下列四條線段何者的長度最長？



(A) $\overline{AE}$

(B) $\overline{BE}$

(C) $\overline{CE}$

(D) $\overline{DE}$

【答案】B
【詳解】

❶在$\triangle ABC$中，

因為$\overline{AB}=\overline{BC}$，所以$\angle BAC=\angle BCA=(180°-44°-42°)\div 2=47°$，

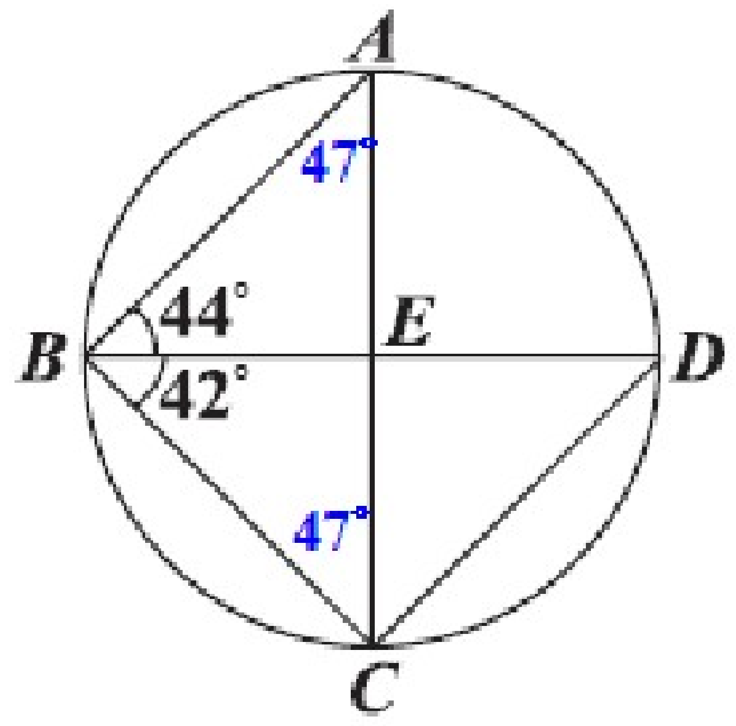
在$\triangle ABE$中，因為$\angle BAE>\angle ABE$，所以$\overline{BE}>\overline{AE}$(大角對大邊)，

在$\triangle BCE$中，因為$\angle BCE>\angle CBE$，所以$\overline{BE}>\overline{CE}$(大角對大邊)，

$\overline{BE}$目前是最長邊，

因此只要知道$\overline{BE}$與$\overline{DE}$的大小關係，

即可判斷出最長線段。



❷$\overline{DE}$、$\overline{CE}$都在$\triangle CDE$中，找出$\triangle CDE$內角度數，

即可判斷兩者的大小關係，進而得知$\overline{BE}$與$\overline{DE}$的大小關係。

因為$\angle ECD(\angle ACD)$與$\angle ABD$對同弧AD，

所以$\angle ECD=\angle ABD=44°$，

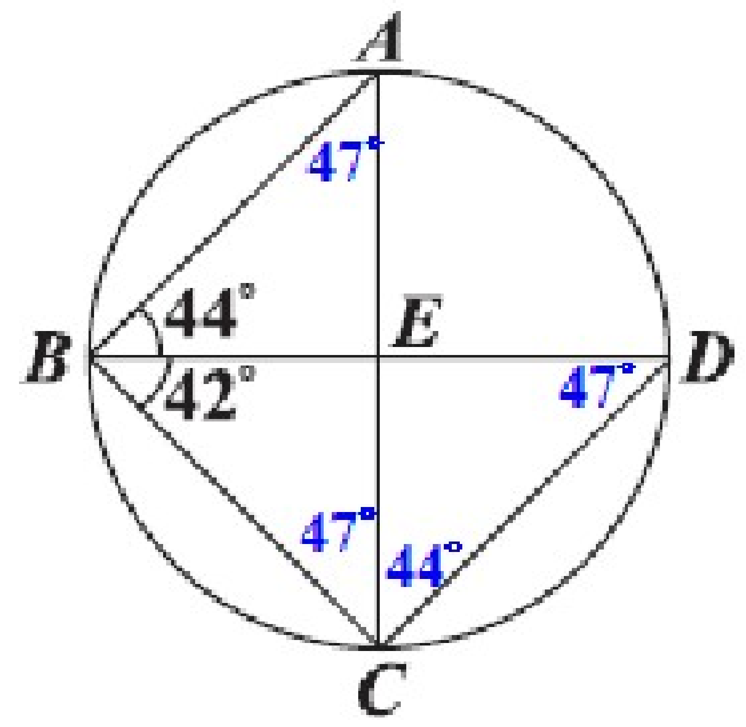
因為$\angle EDC(\angle BDC)$與$\angle BAC$對同弧BC，

所以$\angle EDC=\angle BAC=47°$，

因為$\angle EDC>\angle ECD$，所以$\overline{CE}>\overline{DE}$

➔ $\overline{BE}>\overline{CE}>\overline{DE}$

因此$\overline{BE}$是四條線段中長度最長的。



故選(B)

20. 附圖的正三角形ABC與正方形$CDEF$中，B、C、D三點共線，

且$\overline{AC}=10$，$\overline{CF}=8$。若有一動點P沿著$\overline{CA}$由C往A移動，

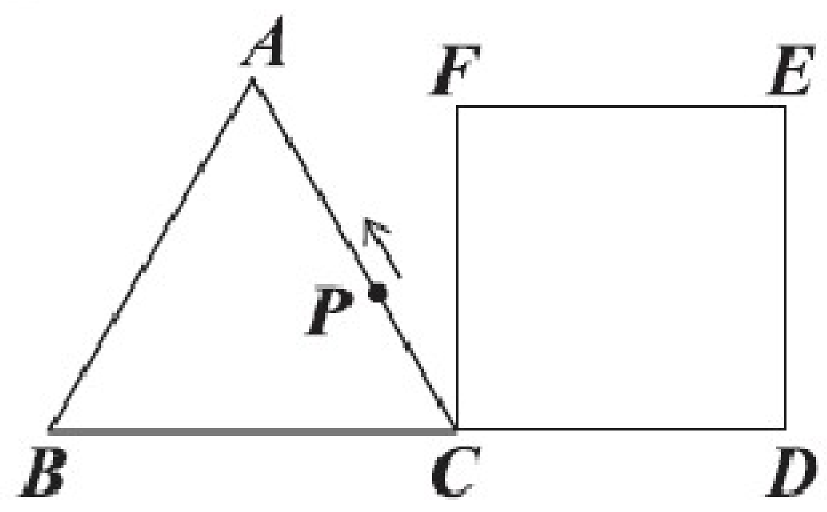
則$\overline{FP}$的長度最小為多少？

(A) 4

(B) 5

(C) $4\sqrt{3}$

(D) $5\sqrt{3}$



【答案】A
【詳解】

P點沿著$\overline{CA}$移動，

$\overline{FP}$的長度最小值發生在$\overline{FP}\perp\overline{CA}$時

(點到直線的距離以垂直距離為最短)，

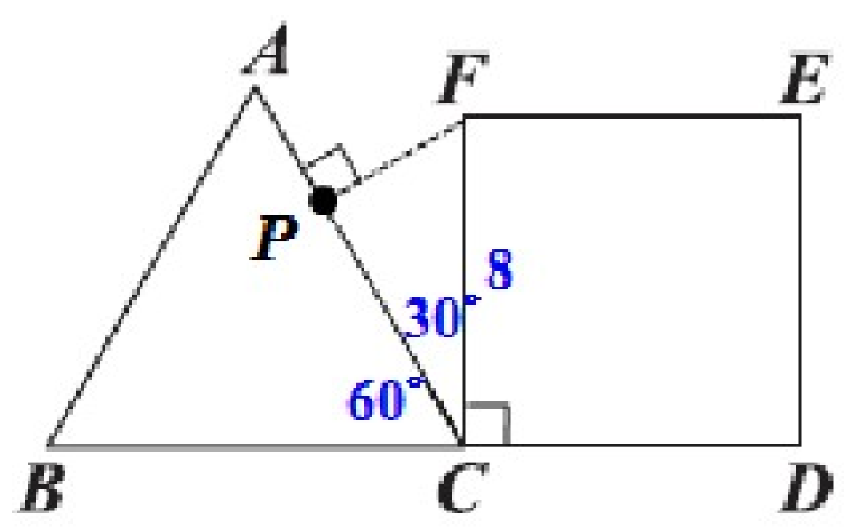
如附圖所示，求出此時的$\overline{FP}$長度。

因為正三角形一個內角為 60°，正方形一個內角為 90°，

所以$\angle PCF=180°-60°-90°=30°$

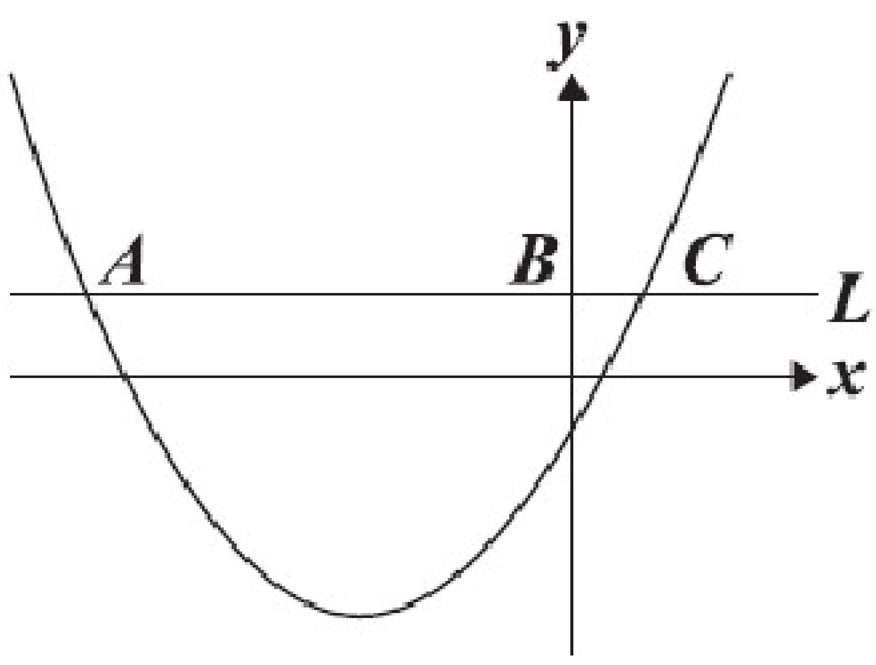
➔ $\triangle PCF$為 30°、60°、90°的直角三角形，

則$\overline{FP}:\overline{CF}=1:2$ ➔ $\overline{FP}:8=1:2$ ➔ $2\overline{FP}=8$ ➔ $\overline{FP}=4$。



故選(A)

21. 坐標平面上有一水平線 L 與二次函數 $y=a(x+7)^2-10$ 的圖形，其中 a 為一正數，且 L 與二次函數圖形相交於 A、C 兩點，與 y 軸相交於 B 點，其位置如圖所示。若 $\overline{AB}$ ： $\overline{BC}$ ＝5：1，則 $\overline{AC}$ 的長度為何？



(A) 17　　(B) 19

(C) 21　　(D) 24

【答案】C

【詳解】

二次函數 $y=a(x+7)^2-10$ 的頂點在 $(-7,-10)$ ，對稱軸為 $x=-7$ 。

因為二次函數圖形為線對稱圖形，

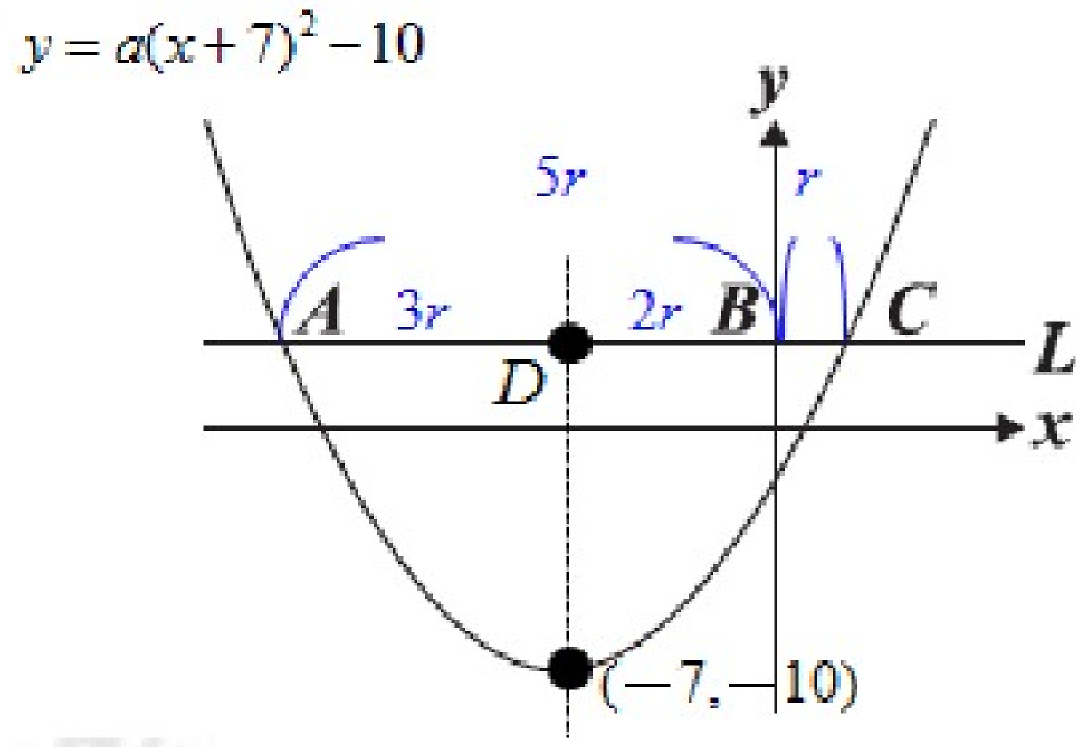
所以水平線 L 與二次函數圖形相交的 A、C 兩點為對稱點，

已知 $\overline{AB}$ ： $\overline{BC}$ ＝5：1，

可設 $\overline{AB}=5r$ ， $\overline{BC}=r$ ，r 不等於 0，

設對稱軸 $x=-7$ 與直線 L 相交於 D 點，

根據對稱軸垂直平分對稱點的連線段，



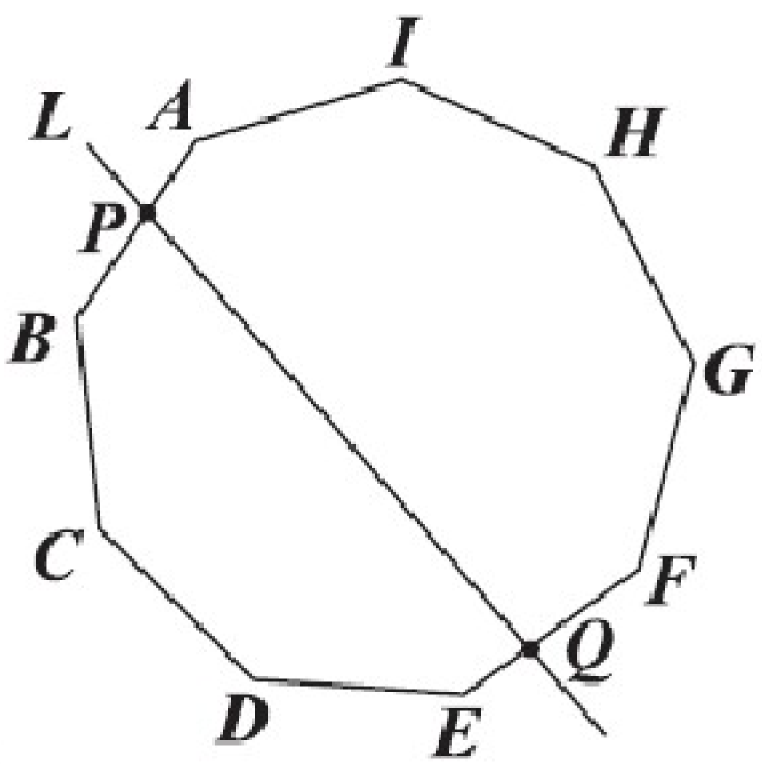
可知 $\overline{AD}=\overline{CD}=(5r+r)\div 2=3r$ ➔ $\overline{BD}=\overline{CD}-\overline{BC}=3r-r=2r$ 。

由二次函數頂點的 x 坐標為 -7，

可得 $\overline{BD}=|-7|=7$ ➔ $2r=7$ ➔ $r=\frac{7}{2}$ ，$\overline{AC}=5r+r=6r$ ，將 $r=\frac{7}{2}$ 代入可得 $\overline{AC}=6\times\frac{7}{2}=21$ 。

故選(C)

22. 如圖，直線 L 將正九邊形 $ABCDEFGHI$ 分割成兩個區域，且分別與 $\overline{AB}$ 、$\overline{EF}$ 相交於 P 點、Q 點。若 $\angle APQ$ 的外角為 75°，則 $\angle PQE$ 的度數為何？



(A) 75

(B) 85

(C) 95

(D) 105

【答案】B

【詳解】

正九邊形一個內角的度數＝$(9-2)\times 180°\div 9=1260°\div 9=140°$ ，

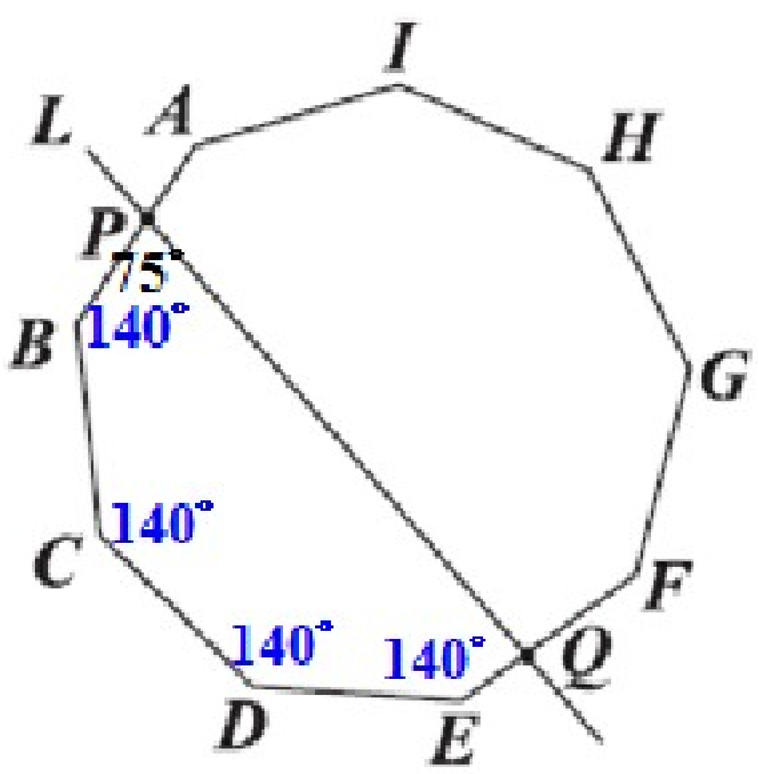
則 $\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=140°$ ，

題目已知 $\angle APQ$ 的外角為 75° ，即 $\angle BPQ=75°$ ，

因此在六邊形 $PBCDEQ$ 中， $\angle PQE=(6-2)\times 180°-75°-140°\times 4$

$=720°-75°-560°$

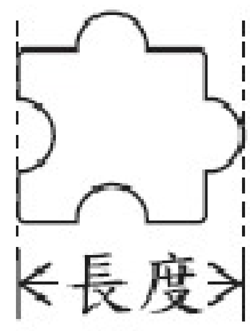
$=85°$ 。



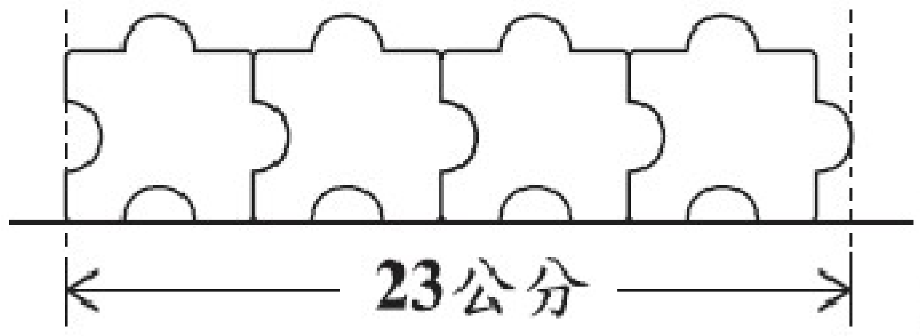
故選(B)

23. 已知有若干片相同的拼圖，其形狀如圖(一)所示，且拼圖依同方向排列時可緊密拼成一列，此時底部可與直線貼齊。當 4 片拼圖緊密拼成一列時長度為 23 公分，如圖(二)所示。當 10 片拼圖緊密拼成一列時長度為 56 公分，如圖(三)所示。求圖(一)中的拼圖長度為多少公分？

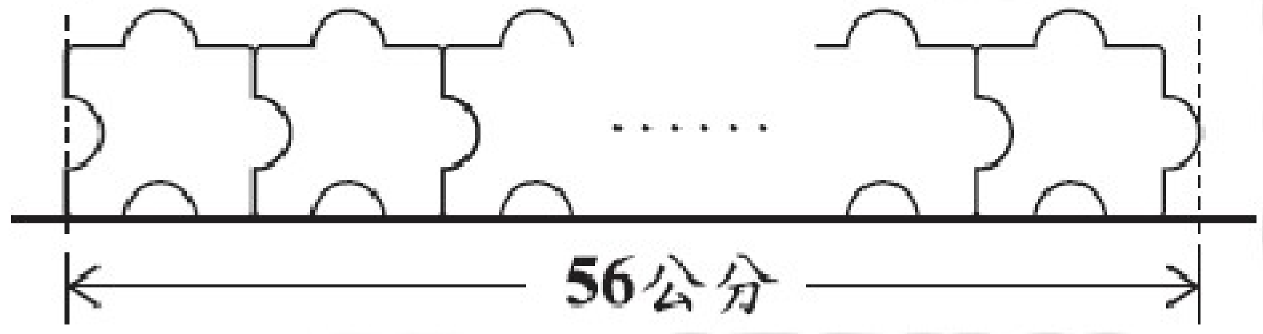
圖(一)



圖(二)



圖(三)



(A) 5.5　(B) 5.6　(C) 5.75　(D) 6.5

【答案】D

【詳解】

如附圖，將圖(一)的拼圖長度看成$(a+b)$，

則圖(二)4 片拼圖長度是 23 公分，

可列出 $4a+b=23\cdots\cdots①$

圖(二)10 片拼圖長度是 56 公分，

可列出 $10a+b=56\cdots\cdots②$

解聯立方程式 $\begin{cases}4a+b=23\cdots\cdots①\\10a+b=56\cdots\cdots②\end{cases}$

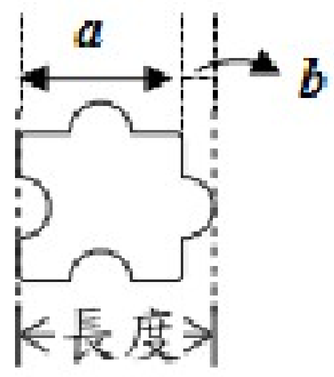
②−① 得 $6a=33$ ➔ $a=\dfrac{11}{2}$，

代入① 得 $4\times\dfrac{11}{2}+b=23$ ➔ $22+b=23$ ➔ $b=1$，

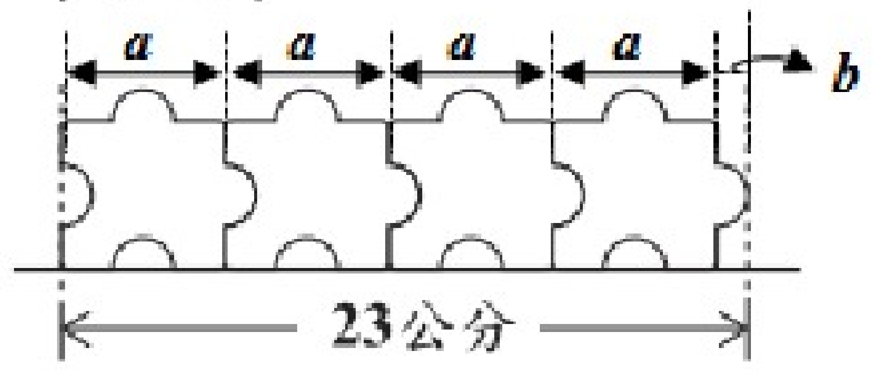
因此圖(一)的拼圖長度 $=\dfrac{11}{2}+1=\dfrac{13}{2}=6.5$ (公分)。

故選(D)

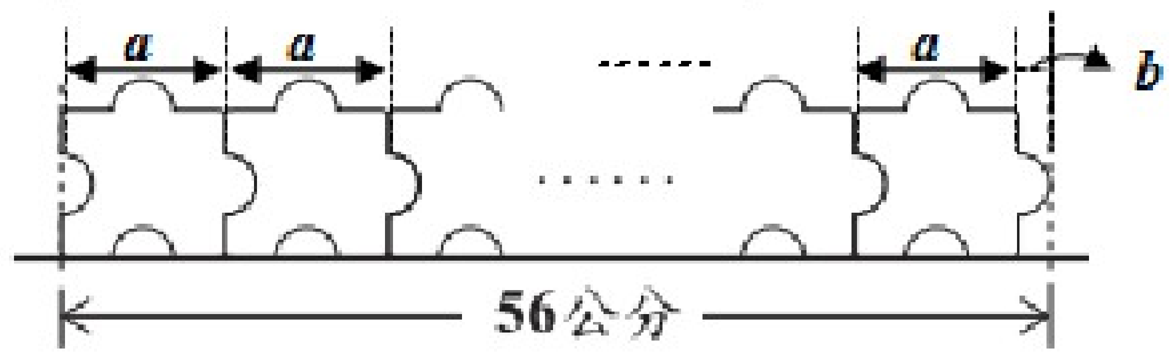
圖(一)



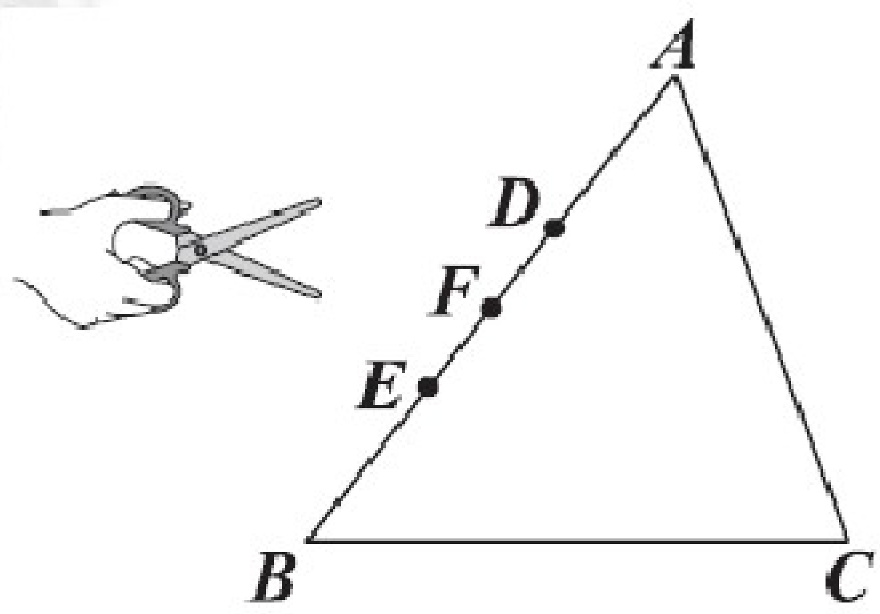
圖(二)



圖(三)



24. 附圖為三角形紙片 ABC，其中 D 點和 E 點將 $\overline{AB}$ 分成三等分，F 點為 $\overline{DE}$ 中點。若小慕從 $\overline{AB}$ 上的一點 P，沿著與直線 BC 平行的方向將紙片剪開後，剪下的小三角形紙片面積為$\triangle ABC$ 的 $\dfrac{1}{3}$，則下列關於 P 點位置的敘述，何者正確？



(A) 與 D 點重合

(B) 與 E 點重合

(C) 在 $\overline{DF}$ 上，但不與 D 點也不與 F 點重合

(D) 在 $\overline{FE}$ 上，但不與 F 點也不與 E 點重合

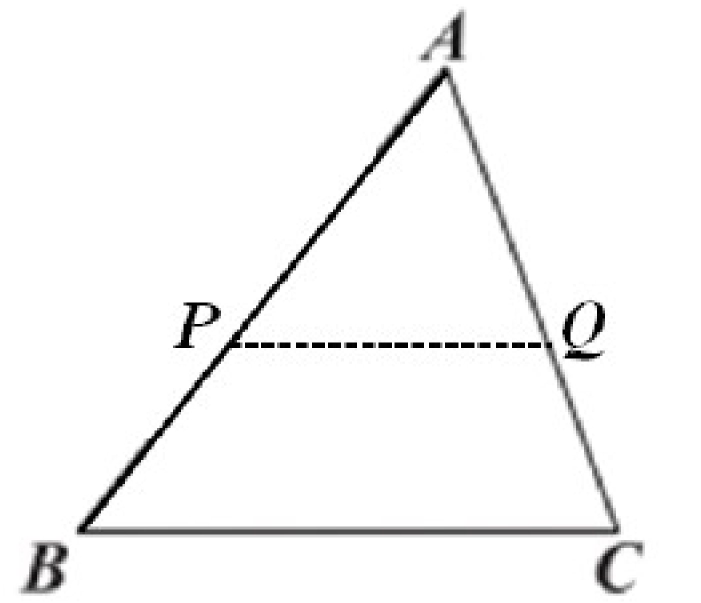
【答案】D

【詳解】

❶設沿著與直線 BC 平行的方向將紙片剪開時，與 $\overline{AC}$ 相交於 Q 點，則 $\overline{PQ}\,//\,\overline{BC}$

➔ $\angle APQ=\angle B$ 、 $\angle AQP=\angle C$ (同位角相等)

➔ $\triangle APQ\sim\triangle ABC$($AA$ 相似)，



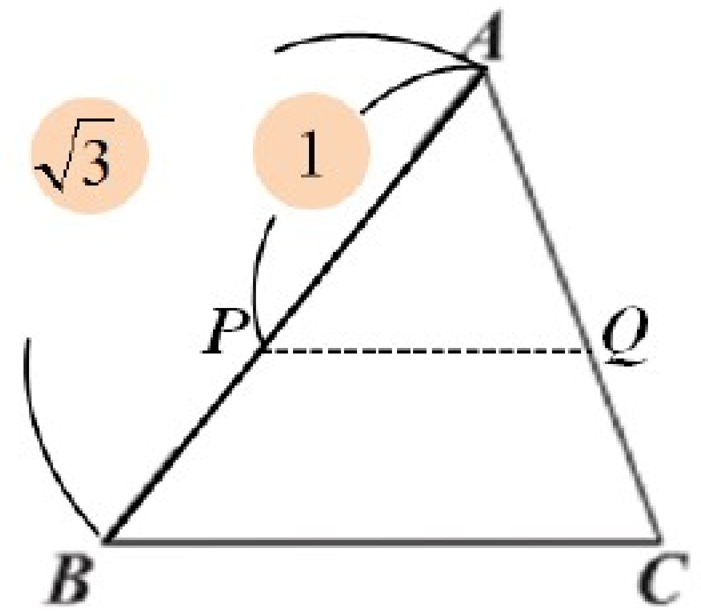
題目已知剪下的紙片面積為 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{3}$ ，

即 $\triangle APQ$ 面積： $\triangle ABC$ 面積＝1：3，

根據相似三角形面積比等於對應邊長平方比，

則對應邊長比 $\overline{AP}:\overline{AB}=\sqrt{1}:\sqrt{3}=1:\sqrt{3}$ (面積比開根號)。

❷ $\overline{AP}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}$ ，

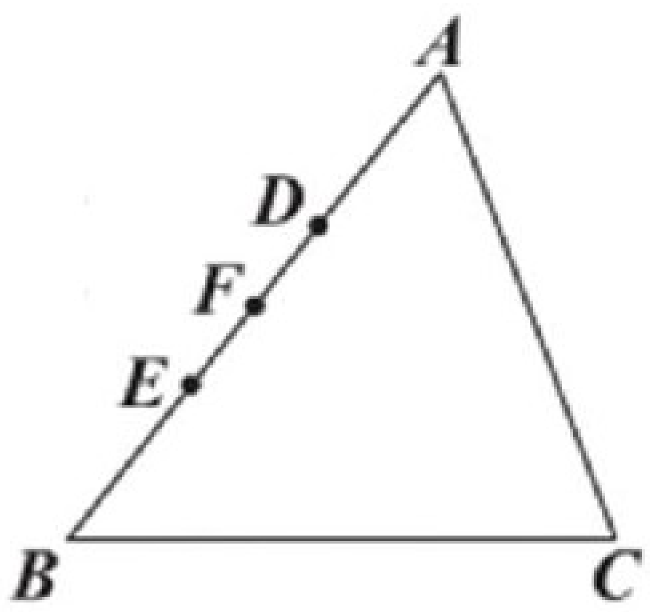


比值為 $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}$ 。

題目已知 D、E 三等分 $\overline{AB}$ ，則 $\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ 、 $\overline{AE}=\frac{2}{3}\overline{AB}$ ，

因此 P 點不與 D 點或 E 點重合。

❸接下來判斷 P 點在 $\overline{DF}$ 或 $\overline{FE}$ 上。



因為 F 點是 $\overline{DE}$ 的中點，

所以 $\overline{AF}=\overline{AD}+\overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AB}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{6}\overline{AB}+\frac{1}{6}\overline{AB}=\frac{3}{6}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ ，

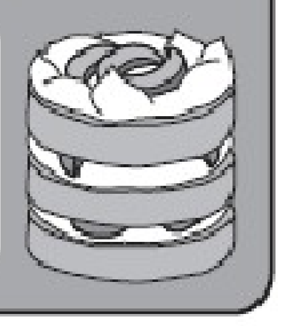
因為 $(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}>(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}>\frac{1}{2}\overline{AB}$ ➔ $\overline{AP}>\overline{AF}$

因此 P 點在 $\overline{FE}$ 上，但不與 F 點也不與 E 點重合。

故選(D)

25. 附圖為有春蛋糕店的價目表，阿凱原本拿了 4 個蛋糕去結帳，結帳時發現該店正在舉辦優惠活動，優惠方式為每買 5 個蛋糕，其中 1 個價格最低的蛋糕免費，因此阿凱後來多買了 1 個黑櫻桃蛋糕。若阿凱原本的結帳金額為 x 元，後來的結帳金額為 y 元，則 x 與 y 的關係式不可能為下列何者？

蛋糕種類	伯爵茶蛋糕	鮮奶捲蛋糕	濃起司蛋糕	黑櫻桃蛋糕	水果派蛋糕	千層派蛋糕
每個價格	40元	45元	45元	55元	60元	70元



(A) $y=x$　(B) $y=x+5$　(C) $y=x+10$　(D) $y=x+15$

【答案】B

【詳解】

❶阿凱原本買了 4 個蛋糕，後來多買了一個 55 元的黑櫻桃蛋糕，

原蛋糕	原蛋糕	原蛋糕	原蛋糕	黑櫻桃
？元	？元	？元	？元	55元

優惠方式為價格最低的蛋糕免費，

如果原本四個蛋糕中最便宜的蛋糕價格等於 55 元或高於 55 元，

則最後買的黑櫻桃蛋糕是最便宜的➔免費，

因此原本結帳金額與後來結帳金額一樣，即 $y=x$ 。

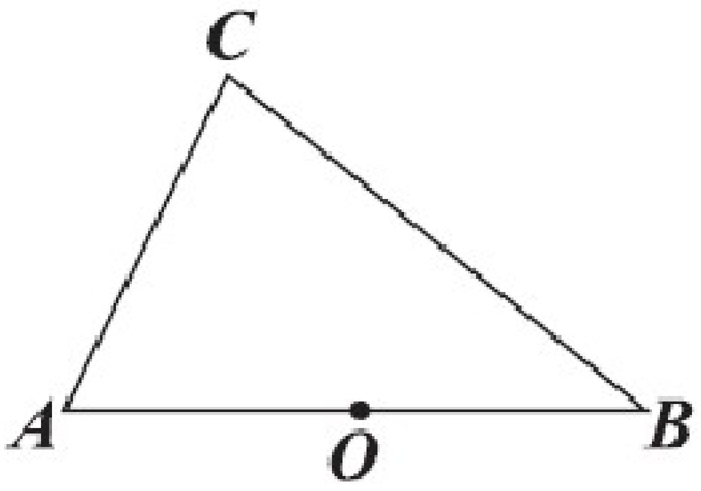
❷如果原本四個蛋糕中最便宜的蛋糕價格低於 55 元，
則這個最便宜的蛋糕就變成免費，改以黑櫻桃蛋糕計費
➔原本結帳金額與後來結帳金額會不一樣，
如果原本四個蛋糕中最便宜的蛋糕是 40 元(伯爵茶蛋糕)，
優惠後這個 40 元蛋糕免費，
但花了 55 元買黑櫻桃蛋糕，則 $x-40+55=y$ ➔ $y=x+15$
❸如果原本四個蛋糕中最便宜的蛋糕是 45 元(鮮奶捲或濃起司蛋糕)，
優惠後這個 45 元蛋糕免費，
但花了 55 元買黑櫻桃蛋糕，則 $x-45+55=y$ ➔ $y=x+10$
綜合上述，x 與 y 的關係式不可能為 $y=x+5$ 。
故選(B)

26. 如圖，銳角三角形 ABC 中，O 點為 $\overline{AB}$ 中點。甲、乙兩人想在 $\overline{AC}$ 上找一點 P，使得 $\triangle ABP$ 的外心為 O，其作法分別如下：

(甲)作過 B 且與 $\overline{AC}$ 垂直的直線，交 $\overline{AC}$ 於 P 點，則 P 即為所求

(乙)以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{AC}$ 於 P 點，則 P 即為所求

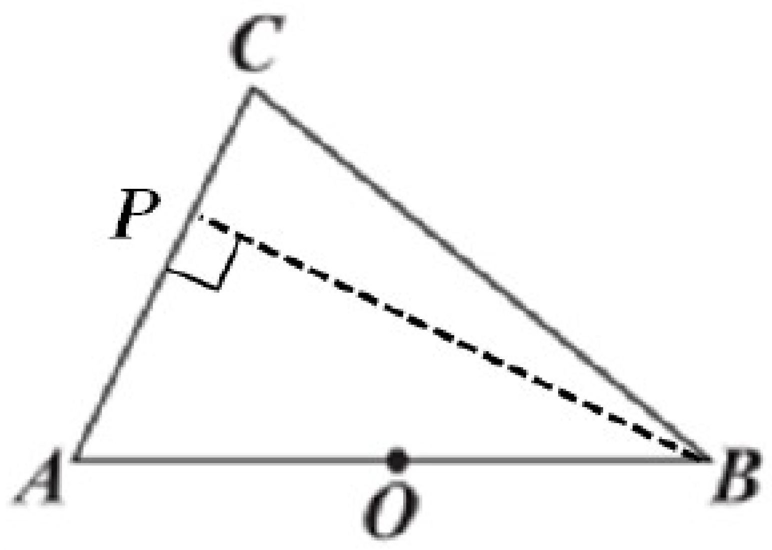
對於甲、乙兩人的作法，下列判斷何者正確？



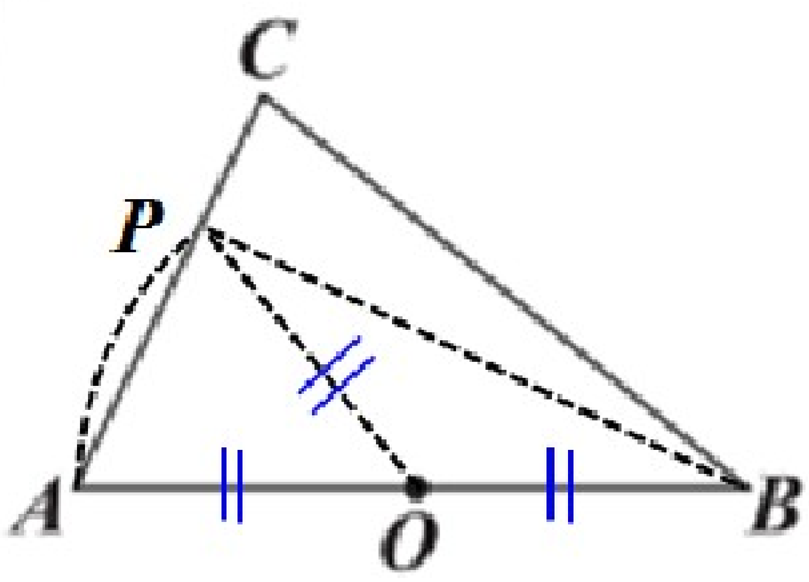
(A) 兩人皆正確　　(B) 兩人皆錯誤
(C) 甲正確，乙錯誤　　(D) 甲錯誤，乙正確

【答案】A
【詳解】

根據甲作法，作圖如附圖，
可知 $\triangle ABP$ 是直角三角形，$\overline{AB}$ 為斜邊，
題目已知 O 點為 $\overline{AB}$ 的中點，即 O 點在 $\triangle ABP$ 斜邊的中點，
根據直角三角形外心在斜邊中點，
可知 O 點是 $\triangle ABP$ 的外心
➔甲作法正確。



根據乙作法，作圖如附圖，
連接 $\overline{BP}$ 、$\overline{OP}$ ，
因為以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 長為半徑畫弧，交 $\overline{AC}$ 於 P 點，
所以 $\overline{OP}=\overline{OA}$(半徑相等)，
又 O 點為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{OA}=\overline{OB}$ ，所以 $\overline{OP}=\overline{OA}=\overline{OB}$ ，
因為 O 點到 $\triangle ABP$ 三頂點距離相等，
所以 O 點是 $\triangle ABP$ 的外心
➔乙作法正確。
故選(A)



第二部分：非選擇題（1～2題）

1. 品沏飲料店提供三種品項，其對應兩種容量的價格如圖所示。

品項	中杯 (750毫升)	大杯 (1000毫升)
古早味紅茶	30元	45元
百香綠茶	35元	50元
珍珠奶茶	50元	65元

品沏飲料店的老闆規劃回饋活動，凡自備容器購買飲料者，每種品項中杯皆折扣 2 元、大杯皆折扣 5 元。

請根據上述資訊，回答下列問題：

(1)老闆收到顧客反映，有些品項在自備容器後大杯的每毫升價格還是比中杯的貴，請問是圖中的哪些品項？

(2)若老闆想要讓所有品項在自備容器後大杯的每毫升價格都比中杯的便宜，則他應將大杯的折扣都至少改成多少元？請詳細解釋或完整寫出你的解題過程，並求出答案。

【詳解】

(1)古早味紅茶：

中杯 30 元，750 毫升，自備容器可折 2 元，則每毫升價格＝$\dfrac{30-2}{750}=\dfrac{28}{750}$(元)，

大杯 45 元，1000 毫升，自備容器可折 5 元，則每毫升價格＝$\dfrac{45-5}{1000}=\dfrac{40}{1000}$(元)，

$\dfrac{28}{750}=\dfrac{112}{3000}<\dfrac{40}{1000}=\dfrac{120}{3000}$ →自備容器後古早味紅茶大杯比中杯貴

百香綠茶：

中杯 35 元，750 毫升，自備容器可折 2 元，則每毫升價格＝$\dfrac{35-2}{750}=\dfrac{33}{750}$(元)，

大杯 50 元，1000 毫升，自備容器可折 5 元，則每毫升價格＝$\dfrac{50-5}{1000}=\dfrac{45}{1000}$(元)，

$\dfrac{33}{750}=\dfrac{132}{3000}<\dfrac{45}{1000}=\dfrac{135}{3000}$ →自備容器後百香綠茶大杯比中杯貴

珍珠奶茶：

中杯 50 元，750 毫升，自備容器可折 2 元，則每毫升價格＝$\dfrac{50-2}{750}=\dfrac{48}{750}$(元)，

大杯 65 元，1000 毫升，自備容器可折 5 元，則每毫升價格＝$\dfrac{65-5}{1000}=\dfrac{60}{1000}$(元)，

$\dfrac{48}{750}=\dfrac{192}{3000}>\dfrac{60}{1000}=\dfrac{180}{3000}$ →自備容器後珍珠奶茶大杯比中杯便宜

綜合上述，自備容器後古早味紅茶、百香綠茶大杯比中杯貴。

(2)設大杯的折扣都至少改成 x 元，

由上題知古早味紅茶自備容器中杯每毫升價格 $=\frac{28}{750}=\frac{112}{3000}$ (元)，

1000 毫升的大杯是 45 元，折扣後要比中杯便宜，

可列出 $\frac{45-x}{1000}<\frac{112}{3000}$ ➔ $3(45-x)<112$ ➔ $135-3x<112$ ➔ $23<3x$ ➔ $x>\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$ 。

由上題知百香綠茶自備容器中杯每毫升價格 $=\frac{33}{750}=\frac{132}{3000}$ (元)，

1000 毫升的大杯是 50 元，折扣後要比中杯便宜，

可列出 $\frac{50-x}{1000}<\frac{132}{3000}$ ➔ $3(50-x)<132$ ➔ $150-3x<132$ ➔ $18<3x$ ➔ $x>6$

由上題知珍珠奶茶自備容器中杯每毫升價格 $=\frac{48}{750}=\frac{192}{3000}$ (元)，

1000 毫升的大杯是 65 元，折扣後要比中杯便宜，

可列出 $\frac{65-x}{1000}<\frac{192}{3000}$ ➔ $3(65-x)<192$ ➔ $195-3x<192$ ➔ $3<3x$ ➔ $x>1$

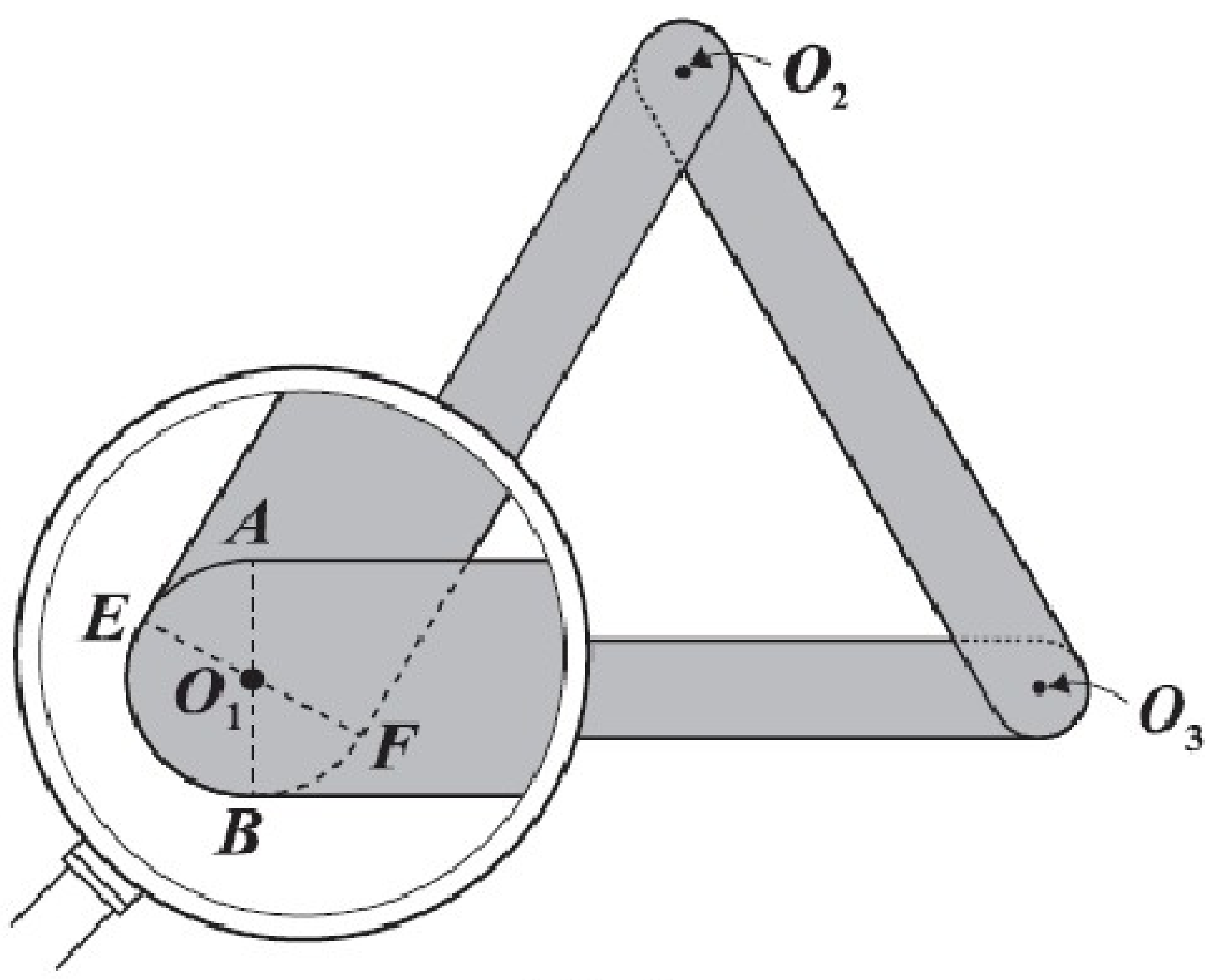
因為 $x>7\frac{2}{3}$ 、 $x>6$ 、 $x>1$ ，所以 $x>7\frac{2}{3}$ 才能使自備容器後大杯的每毫升價格都比中杯的便宜，

滿足條件的整數最小是 8，因此至少要折扣 8 元。

2. 預警三角標誌牌用於放置在車道上，告知後方來車前有停置車輛，如圖(一)所示。貝貝想製作類似此標誌的圖形，先使用反光材料設計一個物件，如圖(二)所示，其中四邊形 $ABCD$ 為長方形，AB 、 CD 分別為以 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為直徑的半圓，且灰色部分為反光區域。接著，將三個圖(二)的物件以圖(三)的方式組合並固定，其中固定點 O_1、O_2、O_3 皆與半圓的圓心重合，且各半圓恰好與長方形的長邊相切，而在圖(三)左下方的局部放大圖中，B、E 皆為切點，$\overline{AB}$ 、 $\overline{EF}$ 皆為直徑。

圖(一)

圖(二)



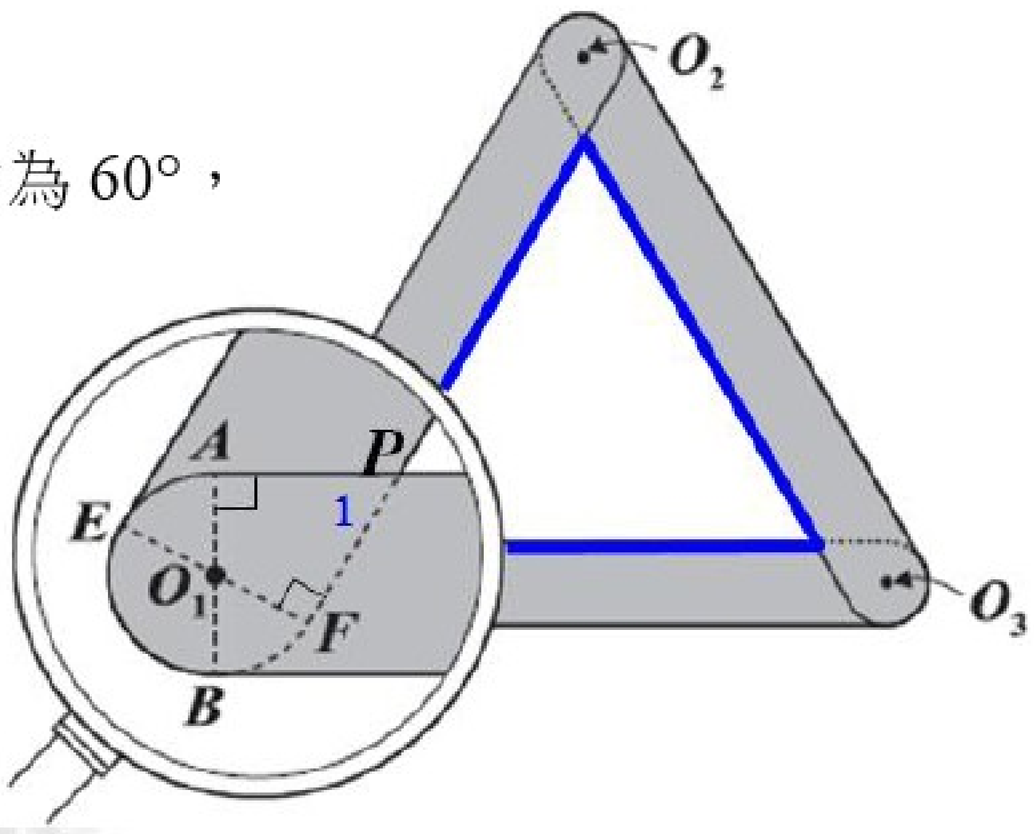
圖(三)

請根據上述資訊，回答下列問題：

(1)圖(三)中 $\angle AO_1F$ 的度數為多少？

(2)根據圖(三)的組合方式，求出可見的反光區域面積為多少？請詳細解釋或完整寫出你的解題過程，並求出答案。

【詳解】



(1)因為是由 3 個相同的物件組成附圖的圖形，

所以附圖中物件內部圍出的藍色三角形為正三角形，每個內角為 60°，

左下角中，$\angle 1$ 與正三角形的內角為對頂角，可得 $\angle 1=60°$。

又各半圓恰好與長方形的長邊相切，

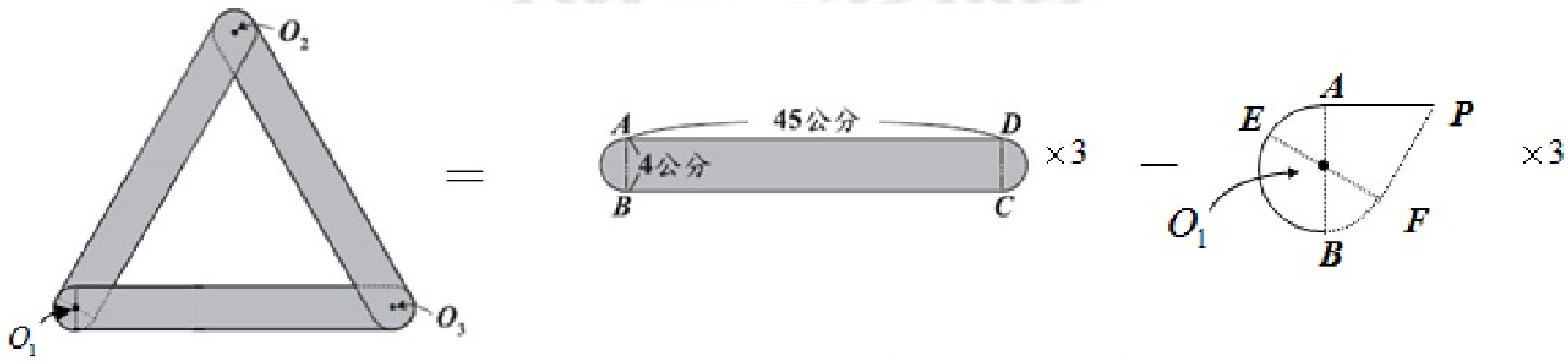
可得 $\overline{OA}\perp\overline{AP}$，$\overline{OF}\perp\overline{FP}$

(圓心與切點的連線垂直過此切點的切線)，

在四邊形 AO_1FP 中，

$\angle AO_1F=360°-90°-90°-60°=120°$。

(2) 可看見的反光區域面積＝圖(二)面積×3－任兩物件重疊部分面積×3



❶圖(二)面積＝長方形 $ABCD$ 面積＋兩個半圓面積

直徑 $\overline{AB}=4$，
半徑＝2

$=45\times4+2\times2\times\pi\div2\times2$

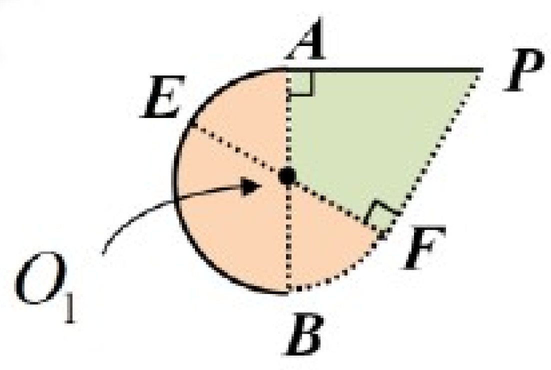
$=180+4\pi$ (平方公分)

❷任兩物件重疊部分面積＝扇形 ABF 面積＋四邊形 AO_1FP 面積，

由前一題知 $\angle AO_1F=120°$，

則扇形 ABF 圓心角＝$360°-120°=240°$，

扇形 ABF 面積＝$2\times2\times\pi\times\dfrac{240°}{360°}=\dfrac{8}{3}\pi$ (平方公分)。



連接 $\overline{O_1P}$，四邊形 AO_1FP 分成兩個三角形，

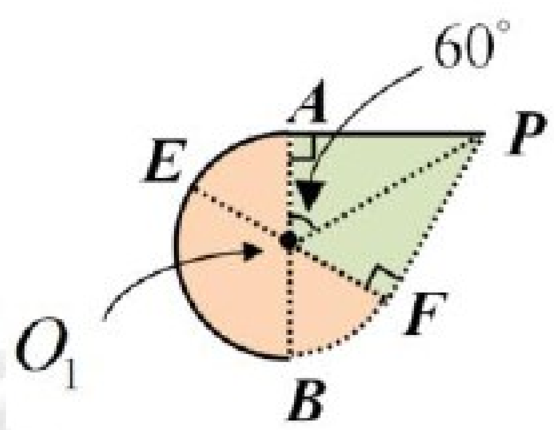
因為 $\overline{O_1A}=\overline{O_1F}$ (半徑)，$\overline{O_1P}=\overline{O_1P}$，$\angle O_1AP=\angle O_1FP=90°$，所以 $\triangle AO_1P\cong\triangle FO_1P$ (RHS 全等)

➔ $\angle AO_1P=\dfrac{1}{2}\angle AO_1F=\dfrac{1}{2}\times120°=60°$，

可知 $\triangle AO_1P$ 是 30°、60°、90°的直角三角形

➔ $\overline{O_1A}:\overline{AP}=1:\sqrt{3}$ ➔ $2:\overline{AP}=1:\sqrt{3}$

➔ $\overline{AP}=2\sqrt{3}$，$\triangle AO_1P$ 面積＝$\dfrac{\overline{O_1A}\times\overline{AP}}{2}=\dfrac{2\times2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，



因此四邊形 AO_1FP 面積＝$\triangle AO_1P$ 面積×2＝$2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$ (平方公分)，

任兩物件重疊部分面積＝$\dfrac{8}{3}\pi+4\sqrt{3}$ (平方公分)。

❸可看見的反光區域面積＝$(180+4\pi)\times3-(\dfrac{8}{3}\pi+4\sqrt{3})\times3=540+12\pi-8\pi-12\sqrt{3}$

$=540+4\pi-12\sqrt{3}$ (平方公分)